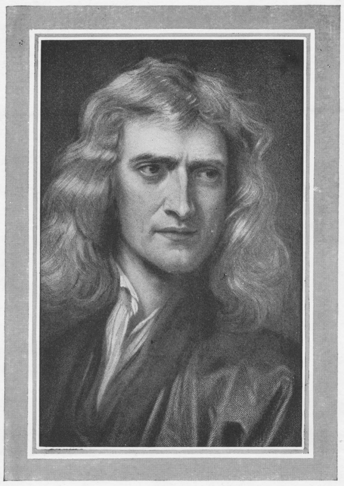
COMPORTEMENT STATIQUE DES SYSTEMES MECANIQUES

Un peu d'histoire…



Sir Isaac Newton

Isaac Newton est un philosophe, mathématicien, physicien et astronome anglais né le 4 janvier 1643.. Il est mort le 31 mars 1727 à Kensington.
Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour sa théorie de la gravitation.
À 18 ans, il entre alors au Trinity College de Cambridge (il y restera 7 ans), il étudie l'arithmétique, la géométrie dans les « éléments » d'Euclide et la trigonométrie, mais s'intéresse personnellement à l'astronomie, à l'alchimie et à la théologie.
Il devient à 25 ans bachelier des arts en 1665.C'est à cette période que Newton progresse fortement en mathématiques, physique et surtout en optique (il comprend que la lumière n'est pas blanche mais qu'elle est constituée d'un spectre coloré).
C'est également à cette époque qu'aurait eu lieu l'épisode (très certainement légendaire) de la pomme qui tomba de l'arbre sur sa tête, lui révélant les lois de la gravitation universelle.
Newton accélère dans ses recherches, il entame en 1666 l'étude des fonctions dérivables et de leurs dérivées à partir du tracé des tangentes sur la base des travaux de Fermat. Il classifie les cubiques et en donne des tracés corrects avec asymptotes, inflexions et points de rebroussement.
En 1669, il rédige un compte-rendu sur les fondements du calcul infinitésimal qu'il appelle « méthode des fluxions ». Newton a alors fondé l'analyse moderne.
Trois ans plus tard, à l'âge de 29 ans, il entre à la Royal Society de Londres, après avoir réussi l'exploit de mettre au point un télescope à miroir sphérique dépourvu d'aberration chromatique. Il expose ses travaux sur la lumière et prouve qu'elle est constituée d'un spectre de plusieurs couleurs, à l'aide de son prisme. En 1675, il complète ses travaux en exposant sa théorie corpusculaire. Après avoir terminé ses travaux en optique, il est contacté en 1684 par l'astronome britannique Edmund Halley (le découvreur de la célèbre comète éponyme) à propos des lois de Kepler sur les orbites elliptiques des planètes.
En 1687, il publie donc son œuvre majeure : *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Cette œuvre marque le début de la mathématisation de la physique. Newton y expose le principe d'inertie, la proportionnalité des forces et des accélérations, l'égalité de l'action et de la réaction, les lois du choc, il y étudie le mouvement des fluides, les marées, etc...
Mais il expose aussi et surtout sa théorie de l'attraction universelle ! Les corps s'attirent avec une force proportionnelle au produit de leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.
En 1701, il lut lors d'une réunion le seul mémoire de chimie qu'il a fait connaître et présenta sa loi sur le refroidissement par conduction, ainsi que des observations sur les températures d'ébullition et de fusion.
En 1717, il analyse les pièces de monnaie et en tire une relation or-argent, cette relation est officialisée par la reine Anne.

Newton est considéré comme l'un des plus grands génies et savants de l'histoire humaine. On peut le comparer, par l'envergure de ses travaux et découvertes, à deux autres grands noms de la science : Archimède et Albert Einstein.

Théories scientifiques

Son ouvrage majeur, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, fut publié en 1687 (traduit en français par la marquise du Châtelet en 1756). Les méthodes de calcul qu'il y utilise en font un précurseur du calcul vectoriel.
Dans le domaine de l'optique, il améliore en 1671 le télescope à réflexion de Gregory, et il publie en 1704 son traité *Opticks* démontrant que la lumière blanche est formée de plusieurs couleurs.En mécanique, la plupart de ses principes, déjà mis à mal par le développement de la thermodynamique au XIX^{e} siècle, ont été balayés par la relativité d'Einstein et la dualité onde-corpuscule. Cependant le génie de sa mécanique relationnelle était de simplifier beaucoup, ce qui contribua au développement des recherches dans le domaine de la mécanique simple, où la masse s'identifie à la matière et où l'on suppose une continuité parfaite

Principe d'inertie

Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie d'un corps (ou «objet») persiste dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme tant que la somme des forces extérieures qui s'appliquent sur lui est nulle.
Principe fondamental de la dynamique
L'application d'une force $\vec{F}$ sur un objet,peut modifier la vitesse de ce dernier. L'accélération résultante $\vec{a}$ a la même direction et le même sens que la force appliquée, est proportionnelle à celle-ci et inversement proportionnelle à la masse ***m*** de l'objet. Ce qui peut être résumé dans la relation $\vec{F} = m\,\vec{a}$.

Pour un nombre p de forces s'appliquant sur l'objet, la formule se généralise à $$\sum_{k=1}^{p} \vec{F}_k = m\,\vec{a}$$

Principe des actions réciproques

Si un corps **A** applique une force $\vec{F}_{A/B}$ sur le corps **B**, alors, le corps **B** applique sur le corps **A** une force $\vec{F}_{B/A}$ de même direction (celle de la droite (**AB**)) de même intensité et de sens opposé à $\vec{F}_{A/B}$.
La relation entre ces 2 forces est donc $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$.

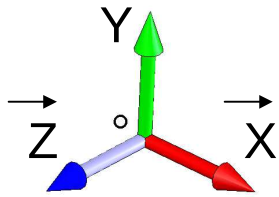
On appelle parfois cette dernière loi la *loi d'action-réaction*

Comportement statique des systèmes mécaniques

Ce chapitre traite des actions mécaniques et de leur influence sur l'équilibre d'une pièce ou d'un ensemble (système mécanique).
La finalité est de savoir modéliser un système (analyse architecturale), modéliser les actions qui s'y exercent afin de pouvoir déterminer ces actions dans chacune des liaisons du système .

1. Vocabulaire :

Pour être étudiée, une pièce mécanique sera assimilée a un solide indéformable (masse invariable, dimensions et géométrie figées.
Un ensemble mécanique sera, quand a lui, nommé « système matériel isolé »
Pour permettre une étude utilisant principalement l'outil vectoriel,
un repère Galiléen orthonormé direct sera défini.



2. Hypothèses :

Pour traiter un problème de statique, on utilise un modèle (modélisation) mathématique de la réalité :
En plus de l'analyse des liaisons et du schéma d'architecture qui en découle, certaines hypothèses simplificatrices doivent être clairement posées au début du problème :

- Les liaisons sont parfaites (sans jeu, ni frottement) :
cette hypothèse permet de négliger les phénomènes de frottement existants dans toute liaison, qui conduisent souvent à des pertes dans la transmission des différentes actions de contact et donc à une baisse du rendement.

- *Le problème possède un plan de symétrie :*
Souvent, le système étudié possède un plan de symétrie. On considère alors que l'étude des actions mécaniques peut être faite dans ce plan, ce qui conduit à une réduction du nombre d'équations a résoudre.
En effet, dans un problème plan {X,Y}, les forces sur l'axe Z pouvant exister dans les liaisons sont négligées.

- Le poids des pièces est négligé :
Il arrive que le poids d'une pièce contribue a son équilibre, on ne peut alors pas le négliger.
Mais souvent, le poids des pièces est négligeable devant les autres efforts mis en jeu.

3. Isolement :

Le principe de résolution d'un problème de statique plane est basé sur **l'isolement** successif des différentes pièces ou sous ensembles. L'isolement consiste à représenter la pièce seule, afin de pouvoir dresser un bilan des actions extérieures qui s'y exercent et les calculer par la suite.
Il faut bien souvent isoler les différentes pièces ou sous ensembles dans un ordre particulier, permettant de réunir progressivement les informations permettant la résolution.
Il faudra alors définir **l'ordonnancement des isolements** (voir page 6).

4. Bilan des actions mécaniques exercées sur un solide :

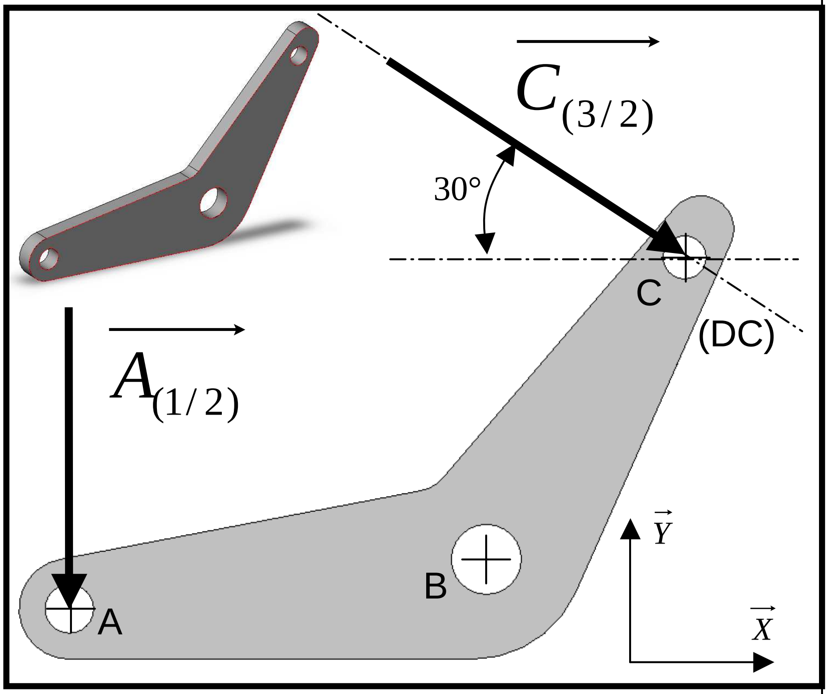
Il existe un outil mathématique appelé « torseur » permettant l'écriture vectorielle directe d'une action mécanique. Son utilisation permet l'écriture d'un bilan de façon précise, mais son utilisation est plus lourde. Le bilan des actions exercées sera donc simplifié et fait sous forme de tableau :

On trouvera dans ce tableau la liste des forces extérieures qui s'exercent sur une pièce isolée.
Le vecteur étant utilisé pour le calcul des forces, on trouvera dans ce tableau les caractéristiques classiques d'un vecteur :

Nom de la force	Direction	Sens	Intensité

Une force sera nommée comme suit :

$\overrightarrow{F_{A(1/2)}}$ ou $\overrightarrow{A_{(1/2)}}$	Force exercée au <u>point A</u> d'une <u>pièce 1</u> sur la <u>pièce isolée 2</u>



Exemple d'une pièce 2 isolée, ou les forces qui s'exercent sont définies par la figure ci contre.

Cette pièce 2, remise dans son contexte est en liaison pivot d'axe Z avec une pièce 3 au point C, une pièce 1 au point A et une pièce 0 fixe au point B

<u>Données :</u> l'intensité (ou norme) de $\overrightarrow{A_{(1/2)}}$ est :

$\left\|\overrightarrow{A_{(1/2)}}\right\| = 200\text{N}.$

Aucune force n'est représentée au point B, car elle est inconnue, mais, comme dans toute liaison, il y a bien une force : $\overrightarrow{B_{(0/2)}}$

<u>Le tableau bilan des forces sur cette pièce est :</u>

Nom de la force	Direction	Sens	Intensité
$\overrightarrow{A_{(1/2)}}$	verticale	*« Négatif »* (inverse de Y) ou *« vers le bas »*	200N
$\overrightarrow{C_{(3/2)}}$	droite (DC)	D→C (D vers C)	Inconnue ?
$\overrightarrow{B_{(0/2)}}$	Inconnue ?	Inconnu ?	Inconnue ?

<u>5. Résolution : analytique (équations, calculs) ou graphique (triangle des forces)</u>

La loi utilisée pour résoudre le problème et calculer les forces inconnues ou partiellement connues est le <u>« Principe Fondamental de la Statique » (P.F.S).</u> Il dit que pour un solide en équilibre

- la somme des forces (vecteurs forces) qui s'y exercent est nulle : $\sum \overrightarrow{F_{ext/S}} = \vec{0}$
- la somme des moments des forces en un point est nulle : $\sum \overrightarrow{M_A F_{ext/S}} = \vec{0}$

La somme des forces est nulle ne signifie pas que la somme de leurs intensités est égale à zéro MAIS que la somme de leurs coordonnées respectivement sur les axes $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ est nulle.

<u>Exemple :</u> 3 forces $\overrightarrow{F1}, \overrightarrow{F2}, \overrightarrow{F3}$ connues appliquées sur un solide en équilibre.

On a : $\overrightarrow{F1} + \overrightarrow{F2} + \overrightarrow{F3} = \vec{0}$ (équation vectorielle)

Ce qui donne,

sur chacun des axes $\vec{X}$ et $\vec{Y}$: $\begin{vmatrix} 200 \\ -150 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 100 \\ +70 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -300 \\ +80 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Si l'on a <u>2 inconnues</u> au maximum (ex: F_{2X} et F_{2Y}, les coordonnées de $\overrightarrow{F2}$), ces 2 équations suffisent.

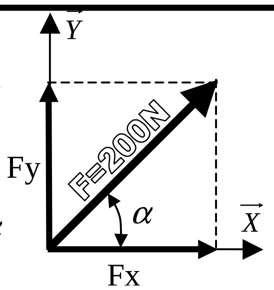
Le nombre d'inconnues est définie par le tableau bilan :

Si on connaît direction, sens et norme : **<u>0 inconnue</u>**

Si on NE connaît QUE la norme : **<u>1 seule inconnue</u>** α

Fx=200cos α

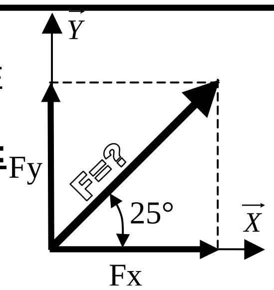
Fy=200sin α



Si on NE connaît QUE l'angle: **<u>1 inconnue :</u>** **<u>la norme</u>**

Fx=Fcos25

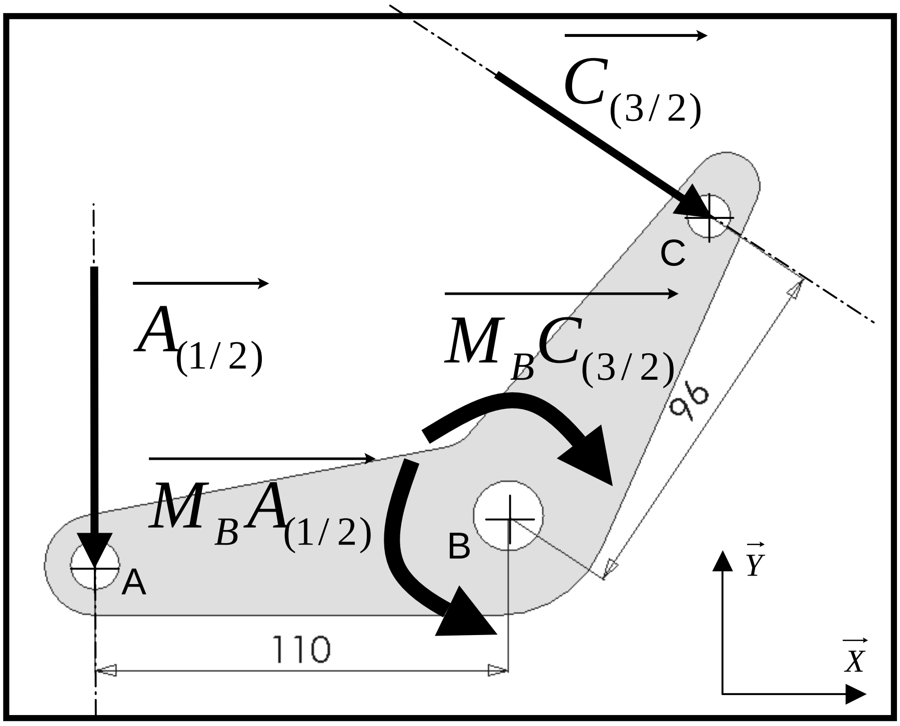
Fy=Fsin25



Si on NE connaît RIEN **<u>2 inconnues</u>**

S'il y'a une troisième inconnue, il faut une troisième équation : <u>l'équation de moment</u>

Un moment est une action créée par une force en un autre point que celui ou elle est appliquée :
Un moment a pour effet une rotation (si celle ci est possible), ou une déformation de la pièce.
L'équation traduit l'équilibre de la pièce en « non rotation » autour d'un point :
Une des forces crée un moment positif, une autre crée un moment inverse de même valeur :
<u>Conclusion : les deux moments s'annulent :</u>



$$\overrightarrow{M_B A_{(1/2)}} + \overrightarrow{M_B C_{(3/2)}} = \vec{0}$$

<u>Remarque :</u> la force au point B ne créé pas de moment au point B :
Vu que c'est la force la plus inconnue, on choisira ce point pour écrire l'équation de moment car la force $B_{0/2}$ n'y apparaîtra pas. L'équation n'aura alors qu'une seule inconnue ($C_{3/2}$).

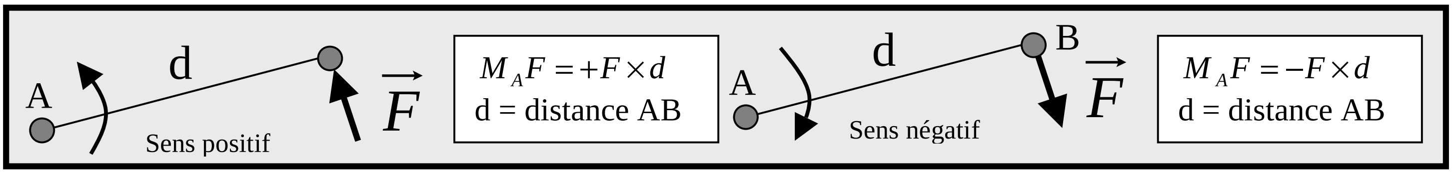
Un moment en un point se calcule par :
Force x distance perpendiculaire à la force passant par le point de calcul.

L'équation de moment au point B de l'exemple du dessus est donc :

A(1/2) x 110 – C(3/2) x 96 = 0 ⇔ <u>C(3/2) = A(1/2) x 96/110 =200 x 96/110 = 174.5 N</u>

L'équation montre que le rapport des forces est inversement proportionnel au rapport des distances.

<u>Attention au signe positif ou négatif pour le calcul des moments.</u>



Cette distance d permettant la création d'un moment a partir d'une force est appelée <u>«bras de levier»</u>

Maintenant que la force partiellement connue est calculée ($C_{3/2}$), on peut utiliser les 2 équations de force pour calculer la troisième force totalement inconnue.

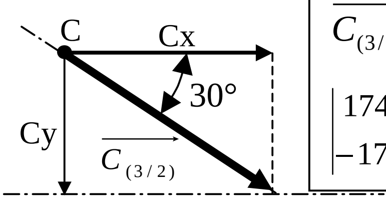
$$\overrightarrow{A_{(1/2)}} + \overrightarrow{C_{(3/2)}} + \overrightarrow{B_{(0/2)}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ -200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -151 \\ -87 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Bx \\ By \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

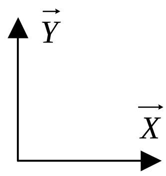
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} Bx \\ By \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +151 \\ +287 \end{vmatrix}$$

$$\left\| \overrightarrow{B_{(0/2)}} \right\| = \sqrt{Bx^2 + By^2} = 102 \text{ N}$$

A partir de la force $\overrightarrow{C_{(3/2)}}$ dont la norme a été calculée,
Il faut calculer ses coordonnées



$$\overrightarrow{C_{(3/2)}} = \begin{vmatrix} Cx \\ Cy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 174.5\cos 30 \\ -174.5\sin 30 \end{vmatrix}$$



Méthode graphique :

Beaucoup plus simple et rapide, la méthode de résolution graphique est basée sur le même principe fondamental :

La somme des forces est nulle

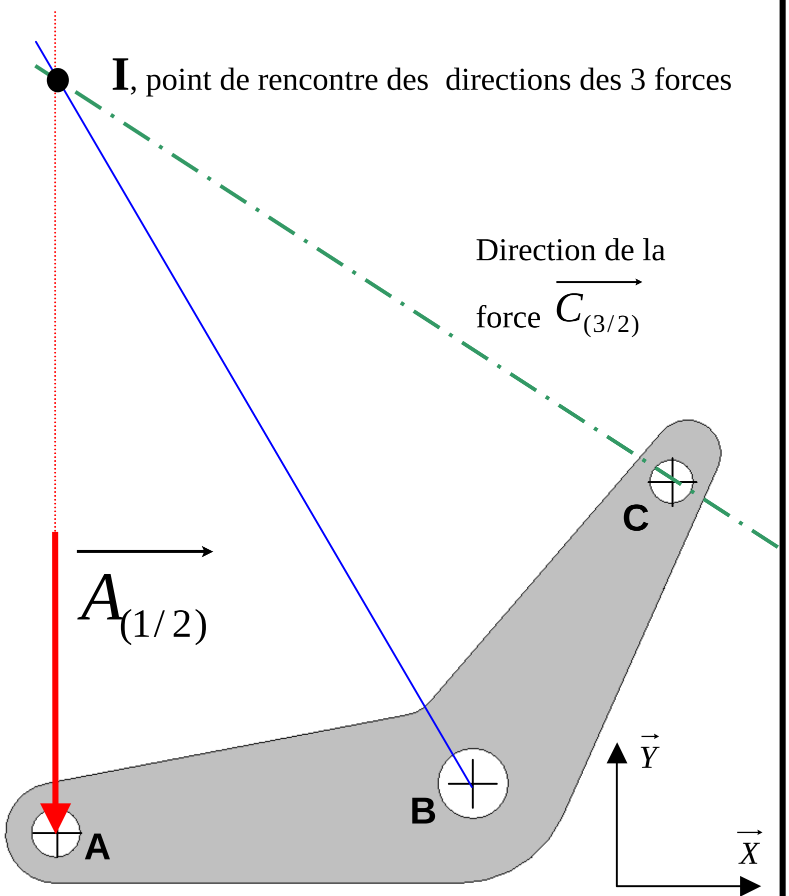
Il s'agit simplement de tracer graphiquement l'addition des trois vecteurs forces qui forment alors un triangle.

Au départ, comme pour la résolution analytique, il ne faut pas plus de trois inconnues statiques, c'est a dire :

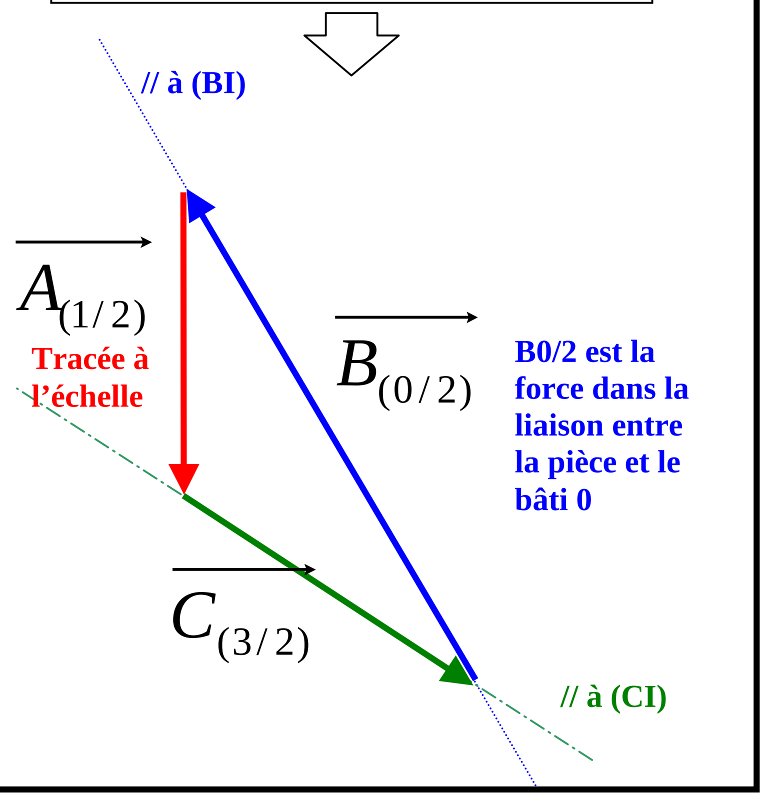
- **Au moins une force connue**
- **La direction d'une 2nde force**

La propriété importante qui va permettre de tracer le triangle des forces est que :

Les directions des trois forces sont concourantes en un seul et même point.



Tracé du triangle des forces appelé aussi « dynamique des forces »



Méthode : Connaissant 2 de ces 3 directions

1. On prolonge ces 2 directions connues et on trouve le point de rencontre I
2. On trouve alors la direction de la 3ème force : Droite (BI)
3. On trace le triangle :
   - On trace en premier la force connue avec une échelle (ex : 1cm = 50N) soit 4cm pour la force $\overrightarrow{A_{(1/2)}}$
   - On trace une parallèle à (AI) passant par l'une des extrémités de $\overrightarrow{A_{(1/2)}}$
   - On trace une parallèle à (BI) passant par l'autre extrémité de $\overrightarrow{A_{(1/2)}}$
   - Ces deux parallèles se croisent pour former un triangle :

Le coté parallèle a (CI) représente la force $\overrightarrow{C_{(3/2)}}$ et le coté parallèle à (BI) représente la force $\overrightarrow{B_{(0/2)}}$.

Il ne reste alors plus qu'a mesurer ces deux cotés, et grâce à l'échelle, a donner leurs normes en Newton.

6 : Méthodologie pour traiter un problème :

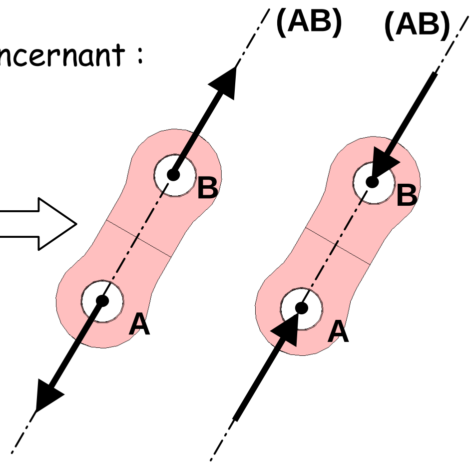
Lorsqu'un problème de statique est posé correctement (schéma d'architecture tracé, et hypothèses définies), il faut ordonnancer les isolements successifs qu'il faut réaliser pour pouvoir traiter le problème, c'est a dire définir l'ordre judicieux dans lequel il va falloir isoler successivement les différents solides ou ensembles de solides .

- pour un **solide soumis a trois forces**, il faut connaître au moins une force, et la direction d'une seconde force (3 inconnues statiques) pour pouvoir résoudre.

Cette direction est souvent donnée par l'isolement précédent, concernant :

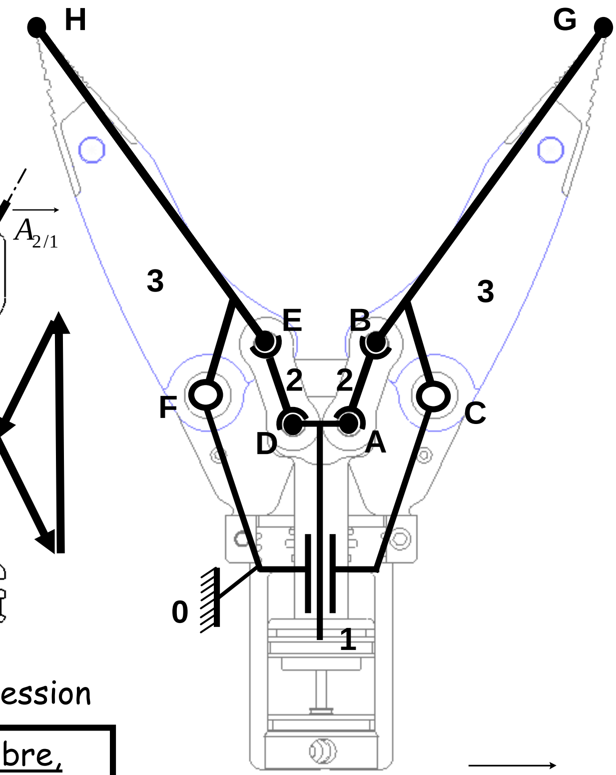
- un solide soumis à 2 forces :

En effet, pour qu'un solide soumis à 2 forces soit en équilibre, les deux forces doivent obligatoirement avoir même direction et même intensité.
Elles doivent simplement être en sens contraires.

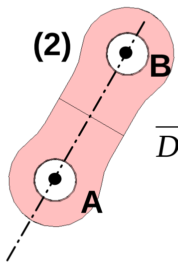


Le fait d'isoler d'abord un solide soumis a 2 forces,
(en liaison avec une pièce soumise à 3 forces), permet
donc de déduire la direction (exemple ci contre : droite (AB))

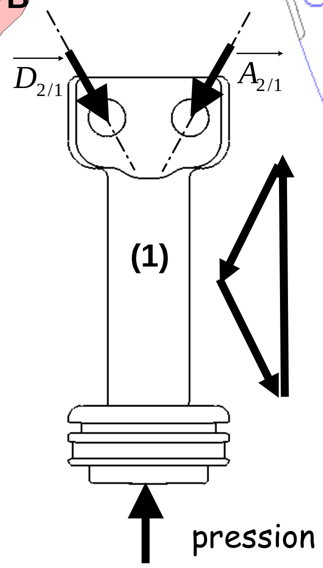
Exemple : Ecarteur hydraulique de désincarcération.
But : calculer la force d'écartement



Ordonnancement :



1. isolement d'une biellette 2
→ déduction de la direction

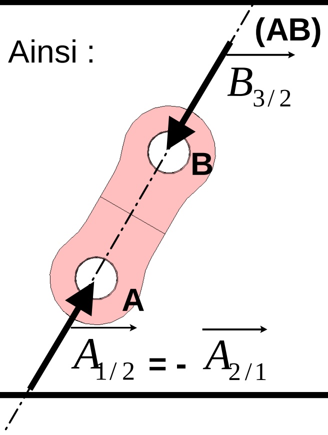


2.isolement du piston 1
→ a partir de la force exercée par la pression connue : on résout et on calcule les forces exercées par les biellettes 2 sur le piston 1.

3. la troisième étape est un retour à l'isolement de la biellette 2, afin de bien définir le sens des forces par
le principe d' ACTION / REACTION.

En effet, pour que l'ensemble du mécanisme soit en équilibre, toute force d'une pièce 1 sur une pièce 2 entraîne une réaction égale mais de sens opposé de 2 sur 1 tel que : $\overrightarrow{A_{1/2}} = -\overrightarrow{A_{2/1}}$

Ainsi :



4. La dernière étape sera alors l'isolement de la mâchoire 3,
permettant le calcul de
la force d'écartement
(force au point G ou H)
ainsi que la force au point C ou F.